Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Madrid 2020, Extraordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Opción A. Álgebra

Sea A una matriz de tamaño 3 × 4 tal que sus dos primeras filas son (1, 1, 1, 1) y (1, 2, 3, 4), y sin ningún cero en la tercera fila.

En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, justificándolo apropiadamente:

a) **La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.**
b) **Las tres filas de A son linealmente independientes.**
c) **A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.**
d) **A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.**
e) **A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.**

Solución:

a) **La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.**

Para que una fila sea combinación lineal de otras, debe poder expresarse como la suma de esas filas multiplicadas por escalares. La solución más simple es sumar las dos primeras filas.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

La tercera fila $(2, 3, 4, 5)$ se obtiene sumando las dos primeras filas: $(1, 1, 1, 1) + (1, 2, 3, 4) = (2, 3, 4, 5)$.

b) **Las tres filas de A son linealmente independientes.**

Las filas son linealmente independientes si ninguna de ellas puede expresarse como combinación lineal de las otras. Para asegurarnos de esto, elegimos una tercera fila que sea claramente distinta de cualquier combinación de las dos primeras.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La tercera fila no puede obtenerse sumando ni multiplicando por ningún escalar las dos primeras filas.

c) **A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.**

Un sistema es compatible determinado si tiene una única solución. Esto ocurre cuando el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada es igual al número de incógnitas. Asumiendo que las tres primeras columnas pertenecen a la matriz de incógnitas del sistema y que, por tanto, habrá 3, necesitamos que el rango sea 3.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz es 3, que coincide con el número de incógnitas, asegurando una única solución.

d) **A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.**

Un sistema es compatible indeterminado tiene infinitas soluciones. Esto ocurre cuando el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada es el mismo, pero tiene un valor menor que el número de incógnitas. Si el número de incógnitas es 3, podemos anular una fila completa para que el rango de A y A* sea 2.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango es 2, que es menor que el número de incógnitas, indicando infinitas soluciones.

e) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.
Un sistema es incompatible si no tiene solución. Esto sucede cuando el rango de la matriz de coeficientes es menor que el rango de la matriz ampliada.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes es 2, pero el de la ampliada es 3, lo que indica que el sistema no tiene solución.

Ejercicio 2. Opción A. Análisis

Dada la función

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x^2+1}{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}}$$

se pide:

a) **Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$.**
b) **Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.**
c) **Estudiar sus asíntotas.**

Solución:

a) **Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$.**

Para $x < 1$ y $x \neq -1$,

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1},$$

siempre que $x \neq -1$ y $x \neq 1$. Al estar $0 < 1$ y $0 \neq -1$, usamos esta rama:

$$f(0) = \frac{1}{0+1} = 1.$$

Ahora, para calcular $(f \circ f)(0)$ debemos evaluar $f\big(f(0)\big) = f(1)$. Dado que $1 \geq 1$, usamos la segunda rama:

$$f(1) = \frac{1^2+1}{4 \cdot 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Es decir:

$$\boxed{\boldsymbol{f(0) = 1 \quad y \quad (f \circ f)(0) = \tfrac{1}{2}}}$$

b) **Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.**

Para que f sea continua en $x = 1$, debe cumplirse

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x).$$

Por la primera rama, cuando $x < 1$,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Por la segunda rama, en $x = 1$,

$$f(1) = \frac{1^2+1}{4 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

Para $x > 1$, la función sigue siendo $\frac{x^2+1}{4x}$, luego

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \;=\; \frac{1}{2}.$$

Se verifica que todos los valores coinciden en $\frac{1}{2}$, por tanto la función es continua en $x = 1$.

Para verificar si es derivable, calculamos la derivada de cada rama y comparamos sus valores en $x = 1$:
Para $x < 1$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$,

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}.$$

De modo que

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) \;=\; -\frac{1}{(1+1)^2} \;=\; -\frac{1}{4}.$$

Para $x > 1$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{4x}$. Podemos reescribir

$$f(x) \;=\; \frac{1}{4}\Big(x + \tfrac{1}{x}\Big),$$

y entonces

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{4}\Big(1 - \tfrac{1}{x^2}\Big).$$

Evaluando en $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) \;=\; \frac{1}{4}\Big(1 - 1\Big) \;=\; 0.$$

Como las derivadas laterales en $x = 1$ difieren ($-\frac{1}{4}$ por la izquierda y 0 por la derecha), la función no es derivable en $x = 1$.

Para ver si existe un extremo relativo en x=1, observaremos el signo de la derivada antes y después de 1:

$$f'(1^-) = -\frac{1}{4}\ (< 0), \quad f'(1^+) = 0, \quad \text{y además para } x > 1,\ f'(x) > 0.$$

Esto indica que la función *decrece* justo antes de $x = 1$ y *crece* para $x > 1$. Aun cuando haya *no* derivabilidad en el punto, el cambio de pendiente de negativa a positiva implica un mínimo relativo en $x = 1$, con valor $f(1) = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, la función:

$$\boxed{\textbf{Es continua en } \mathbf{x = 1}.\ \ \textbf{No es derivable en } \mathbf{x = 1}.\ \textbf{Tiene un mínimo relativo con } \mathbf{f(1) = \tfrac{1}{2}}.}$$

c) Estudiar sus asíntotas.
Asíntota vertical:
Para $x < 1$, tenemos $f(x) = \frac{1}{x+1}$. El dominicio de la función son todos los números reales salvo el -1. Por tanto, el punto candidato a tener máximos o mínimos es el $x = -1$.

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty.$$

La recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{(-x)^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{x^2-1}=\frac{-\infty}{+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{4x}=\frac{\infty}{\infty}$$

Hay una asintota horizontal en $y=0$ cuando x tiende a $-\infty$.

Asíntotas oblicuas:
Como hay una asintota horizontal cuando x tiende a $-\infty$, solo estudiaremos la posibilidad de asintota oblicua en el infinito positivo :

$$y=mx+n$$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{4x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{1}{4}$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{4x}-\frac{1}{4}x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4x}=0$$

Hay una asintota oblicua de ecuacion $y=\frac{1}{4}x$

En conclusión:

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Asíntota vertical en } \mathbf{x=-1},\\ \textbf{Asíntota horizontal } \mathbf{y=0} \textbf{ cuando } \mathbf{x\to-\infty},\\ \textbf{Asíntota oblicua } \mathbf{y=\frac{x}{4}} \textbf{ cuando } \mathbf{x\to+\infty}\end{array}}$$

Ejercicio 3. Opción A. Geometría

Dados el punto $P(3,3,0)$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$ se pide :

a) **Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.**
b) **Calcular el punto simétrico de P respecto de r.**
c) **Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A.**

Solución:

a) **Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.**

Para definir un plano, necesitamos un punto y dos vectores directores contenido en él. Nos sirve el vector director de la recta r, un punto de la recta r, que llamaremos Pr y el vector que une el punto P y el punto Pr

$$\pi : \quad \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{d_r} = (-1,1,0) \\ Pr = (2,0,-1) \\ P = (3,3,0) \\ \overrightarrow{PrP} = (1,3,1) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad \pi : \quad \begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

La ecuación del plano es:

$$\boxed{\boldsymbol{\pi} : \quad \mathbf{x + y - 4z - 6 = 0}}$$

b) **Calcular el punto simétrico de P respecto de r.**

Primero, encontraremos un plano perpendicular a la recta r y que, a su vez, contenga el punto P:

$$\pi' \perp r / P \in \pi' :$$

$$\overrightarrow{n_{\pi'}} = \overrightarrow{d_r} = (-1,1,0) \quad \longrightarrow \quad \pi' : \quad x + y + 0z + \lambda = 0$$

$$P \in \pi' \quad \longrightarrow \quad -3 + 3 + \lambda = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda = 0$$

El plano buscado es:

$$\pi' = -x + y = 0$$

Como segundo paso, calcularemos el punto Q de corte del plano anterior con la recta r. La forma más cómoda de hacerlo es encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r : \quad \left.\begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array}\right\} \quad \longrightarrow \quad -(2-\lambda) + \lambda = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda = 1$$

Sustituyendo lambda en r, hallamos el punto Q (1,1,-1)
El punto Q es el punto medio entre P y su simétrico P':

$$Q = \frac{P + P'}{2} \quad \longrightarrow \quad P' = 2Q - P = 2(1,1,-1) - (3,3,0) = (-1,-1,-2)$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathbf{P'=(-1,-1,-2)}}$$

c) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A.

A y B pertenecen a la recta r. Por tanto, cumplen su ecuación. Partiendo de las ecuaciones paramétricas de la recta:

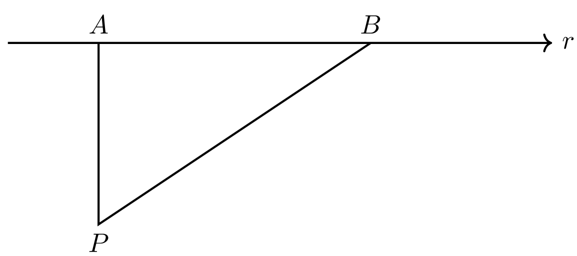
$$A: \left.\begin{array}{l} X = 2-\lambda \\ Y = \lambda \\ Z = -1 \end{array}\right\} \quad B: \left.\begin{array}{l} X = 2-\mu \\ Y = \mu \\ Z = -1 \end{array}\right\}$$

El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene como expresión:

$$\overrightarrow{AB} = (2-\mu,\mu,-1)-(2-\lambda,\lambda,-1) = (-\mu+\lambda,\mu-\lambda,0)$$

$$= (-\mu+\lambda)(1,-1,0)$$

Asumiendo que el ángulo recto está en A:



$$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AB} \quad . \quad \text{Por tanto} \quad \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$$

$$\overrightarrow{AP} = (3,3,0)-(2-\lambda,\lambda,-1) = (1+\lambda,3-\lambda,1)$$

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = (1,-1,0)\cdot(1+\lambda,3-\lambda,1) = 0$$

$$1(1+\lambda)+(-1)(3-\lambda)+0\cdot 1 = 0$$

$$\lambda = 1$$

Por tanto:

$$A = (1,1,-1)$$

$$\overrightarrow{AP} = (2,2,1)$$

El área del triángulo puede calcularse como:

$$A_t = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = (-\mu + 1) \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = (-\mu + 1) \left[-\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k} \right]$$

$$A_t = \frac{1}{2} \left| (-\mu + 1)(-1, -1, 4) \right| = \frac{1}{2} |-\mu + 1| \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2}$$

$$A_t = \frac{1}{2} |-\mu + 1| \cdot \sqrt{18} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$|-\mu + 1| = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{2}\sqrt{18}} = \frac{6}{\sqrt{36}} = 1$$

$$-\mu + 1 = 1 \quad \rightarrow \quad \mu = 0 \quad \rightarrow \quad B(2, 0, -1)$$

$$\mu - 1 = 1 \quad \rightarrow \quad \mu = 2 \quad \rightarrow \quad B(0, 2, -1)$$

Por tanto, hay dos posibles soluciones:

$$\boxed{\mathbf{A} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}) \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{B} = (\mathbf{2}, \mathbf{0}, -\mathbf{1})}$$

$$\boxed{\mathbf{A} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}) \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{B} = (\mathbf{0}, \mathbf{2}, -\mathbf{1})}$$

Ejercicio 4. Opción A. Probabilidad

Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras.

Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento.

Se pide:

a) **Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.**
b) **Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.**
c) **Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.**

Solución:

a) **Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.**

$$\frac{A}{4\,R \quad 2\,N} \qquad \frac{B}{3\,R \quad 3\,N} \qquad \frac{C}{0\,R \quad 6\,N}$$

Según la ley de las probabilidades totales:

$$P(R1) = P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(R \cap C) = P(R/A) \cdot P(A) + P(R/B) \cdot P(B) + P(C/R) \cdot P(C)$$

$$P(R1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{0}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{18} = 0{,}3889$$

$$\boxed{\mathbf{P(R1) = 0{,}3889}}$$

b) **Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.**

$$P(RN) = P(RN/A) \cdot P(A) + P(RN/B) \cdot P(B) + P(RN/C) \cdot P(C) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{6} \cdot \frac{0}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{90} = 0{,}1889$$

$$\boxed{\mathbf{P(RN) = 0{,}1889}}$$

c) **Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.**

$$P(N2/R1) = \frac{P(N2 \cap R1)}{P(R1)} = \frac{17/90}{7/18} = \frac{17}{35} = 0{,}4857$$

$$\boxed{\mathbf{P(N2/R1) = 0{,}4857}}$$

Ejercicio 1. Opción B. Álgebra

Sean las matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$. **Se pide:**

a) **Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.**
b) **Calcular la matriz C = A² - 2I.**
c) **Calcular el determinante de la matriz D = A B Bᵗ (donde Bᵗ denota la matriz traspuesta de B).**

Solución:

a) **Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.**

Una matriz tiene inversa siempre que sea cuadrada y su determinante sea distinto de cero.

$$|A| = 0\cdot 1\cdot 1 + (-1)(-1)\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 1 - (-1)\cdot 0\cdot 0 - (-1)\cdot 1\cdot 2$$

$$|A| = 1 - 2 + 2 = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot (Adj\ A)^t$$

$$Adj A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(Adj\ A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{1}\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) **Calcular la matriz C = A² - 2I.**

$$C = A^2 - 2I$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) **Calcular el determinante de la matriz D = A B Bᵗ (donde Bᵗ denota la matriz traspuesta de B).**

$$B\cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = |A \cdot B \cdot B^t|$$

$$|B \cdot B^t| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 - 4 = 0$$

$$D = |A| \cdot |B \cdot B^t| = |A| \cdot 0 = 0$$

Ejercicio 2. Opción B. Análisis

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25te^{-t^2/4}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.

a) **Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.**
b) **Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.**
c) **La energía total generada por la pila hasta el instante t, E(t), se relaciona con la potencia mediante E'(t) = P(t), con E(0) = 0. Calcular la energía producida por la pila entre el instante t = 0 y el instante t = 2.**

Solución:

a) **Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.**

$$\lim_{x\to+\infty} 25t \cdot e^{-t^2/4} = \lim_{x\to\infty} \frac{25t}{e^{t^2/4}} = \frac{\infty}{\infty} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} = \lim_{x\to\infty} \frac{25}{e^{t^2/4}\cdot\frac{2t}{4}} = \frac{25}{\infty} = 0$$

$$\boxed{\textbf{La energía de la batería se acaba.}}$$

b) **Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.**

Para encontrar la potencia máxima buscaremos máximos en la función $P(t)$:

$$P'(t) = 25\left(e^{-t^2/4}\right) + 25t\left(\frac{-t}{2}\cdot e^{-t^2/4}\right) =$$

$$= 25e^{-t^2/4}\left(1 - \frac{t^2}{2}\right) = 0$$

$$25 \cdot e^{-t^2/4} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{No tiene solución}$$

$$\left(1 - \frac{t^2}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad t^2 = 2 \quad \rightarrow \quad t = \pm\sqrt{2}$$

Al hablar de tiempo, el resultado negativo no tiene sentido físico.

	$[0, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, +\infty)$
$P'(t)$	$+$	$-$
$P(t)$	$\nearrow$	$\searrow$

Efectivamente, $x = \sqrt{2}$ es un máximo.
La potencia máxima se calcula como:

$$P(\sqrt{2}) = 25 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-(\sqrt{2})^2/4} = 25\sqrt{2} \cdot e^{-1/2} = \frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$$

En resumen:

$$\boxed{\textbf{La potencia máxima es de } \frac{\mathbf{25\sqrt{2}}}{\sqrt{\mathbf{e}}}\textbf{. Se produce cuando t} = \sqrt{\mathbf{2}}}$$

c) Calcular la energía producida por la pila entre el instante t = 0 y el instante t = 2.

$E'(t) = P(t)$
Para calcular $E(t)$ es necesario integrar $E'(t)$:

$$\int_0^2 E'(t)dt = \int_0^2 P(t)dt$$

Comprobemos si la función corta el eje X:

$$P(t) = 0 \quad \rightarrow \quad 25t \cdot e^{-t^2/4} = 0 \quad \rightarrow \quad 25t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0$$

Como la función no corta el eje en el intervalo $(0, 2)$:

$$\int_0^2 25t \cdot e^{-t^2/4}dt = \frac{-25 \cdot 4}{2} \int_0^2 \frac{-2t}{4} \cdot e^{-t^2/4}dt = -50 \int_0^2 \frac{2}{4} \cdot t \cdot e^{-t^2/4}dt =$$

$$\left[-50 \cdot e^{-t^2/4}\right]_0^2 = -50 \cdot e^{-2^2/4} + 50 \cdot e^{-0/4} = \frac{-50}{e} + 50$$

$$\boxed{\textbf{La energía producida es de } \mathbf{31{,}61\,u^2}}$$

Ejercicio 3. Opción B. Geometría

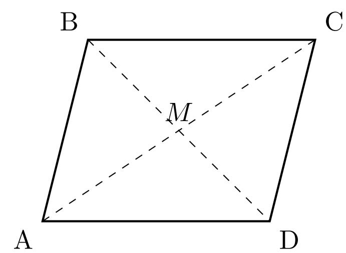
Del paralelogramo ABCD, se conocen los vértices consecutivos $A(1,0,-1)$, $B(2,1,0)$ y $C(4,3,-2)$. Se pide:

- a) **Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.**
- b) **Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.**
- c) **Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores AB y AC.**

Solución:

a) **Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.**

-



El punto M es el punto medio de $\overrightarrow{AC}$:

$$M = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[(4,3,-2)+(1,0,-1)\right] = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

El vector director de la recta $\overrightarrow{d_r}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{d_r} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k} = (-4,4,0)$$

$$r: \quad \begin{cases} \overrightarrow{d_r} = (4,-4,0) \\ M = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \end{cases} \quad \longrightarrow \quad r: \quad \begin{cases} x = \frac{5}{2} + \lambda \\ y = \dfrac{3}{2} - \lambda \\ z = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

En definitiva, la ecuación de la recta es:

$$\boxed{\boldsymbol{r}: \quad \begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{5}{2} + \lambda} \\ \boldsymbol{y = \frac{3}{2} - \lambda} \\ \boldsymbol{z = -\frac{3}{2}} \end{cases}}$$

b) **Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.**

$$\overrightarrow{AD} = D - A = \overrightarrow{BC}$$

$$D = |\overrightarrow{BC}| + A = [(4,3,-2) - (2,1,0)] + (1,0,-1)$$

$$D = (3,2,-3)$$

$$A = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}\right| = \left|-4\,\overrightarrow{i} + 4\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k}\right|$$

$$A = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{32}\,ud^2 = 4\sqrt{2}\,ud^2$$

$$\boxed{\mathbf{A = 4\sqrt{2}\,ud^2}}$$

c) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores AB y AC.

$$|\overrightarrow{AB}| = (1,1,1)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = (3,3,-1)$$

$$\cos\psi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{18}} = \frac{5}{\sqrt{57}}$$

$$\psi = \arccos\frac{5}{\sqrt{57}} = 48^\circ 53'$$

$$\boxed{\textbf{El ángulo es de } \mathbf{48^\circ 53'}}$$

Ejercicio 4. Opción B. Probabilidad y estadística

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y. Sabemos que $P(X) = 0.4$ y que $P(X \cap \bar{Y}) = 0.08$ (donde $\bar{Y}$ es el suceso complementario de Y). Se pide:

a) **Calcular P(Y).**
b) **Calcular P(XUY).**
c) **Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.**

Solución:

a) **Calcular P(Y).**

Al ser dos sucesos independientes:

$$P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$$

$$P(X \cap \overline{Y}) = P(X) - P(X \cap Y) \Rightarrow P(X \cap Y) = P(X) - P(X \cap \overline{Y}) = 0{,}4 - 0{,}08 = 0{,}32$$

$$P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y) \Rightarrow P(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{0{,}32}{0{,}4} = 0{,}8$$

b) **Calcular P(XUY).**

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = 0{,}4 + 0{,}8 - 0{,}32 = 0{,}88$$

c) **Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.**

$$P = P(\overline{X}) = 1 - P(X) = 0{,}6$$

$$E = \text{n}^{\text{o}} \text{ de veces en las que se tiene éxito}$$

$$p = P(\overline{X}) = 1 - P(\overline{X}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

$$E \sim \mathcal{B}(8, 0{,}6)$$

$$P(E \geq 2) = 1 - P(E < 2) = 1 - [P(E = 0) + P(E = 1)]$$

$$P(E \geq 2) = 1 - \left[\binom{8}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^8 + \binom{8}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^7\right]$$

$$\boxed{\mathbf{P(E \geq 2) = 0{,}9915}}$$